Полу-определенные релаксации в оптимизации
Лекция 4: меры оккупации

Роланд Хильдебранд

Факультет Управления и Прикладной Математики МФТИ

весна 2020 г.

Задача оптимального управления

Меры оккупации

Задача вариационного исчисления

задача вариационного исчисления с фиксированными концами

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\, dt \to \inf, \qquad x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$$

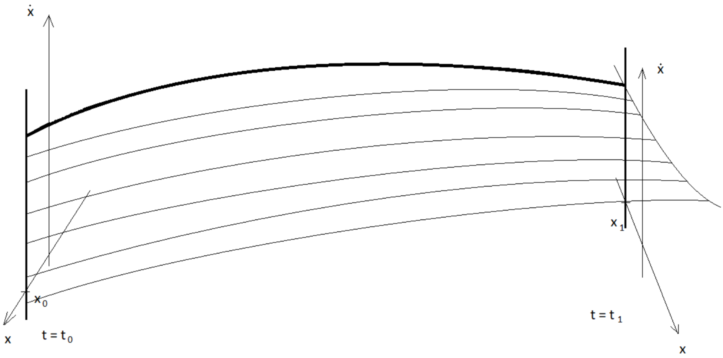
необходимое условие оптимальности первого порядка:
уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

фазовые переменные $x, \dot{x}$

ищем решение с заданными начальной и конечной точками

Метод стрельбы



Гамильтонова форма

вместо переменных $x, \dot{x}$ введем переменные x, p, где $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$

определим $H = \langle p, \dot{x} \rangle - L$, тогда динамика запишется в виде

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \;\; \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

в краевых точках заданы значения x

Задача Больца

композитная функция цены

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\, dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to \inf$$

начальная и конечная точка удовлетворяют условию

$$\Phi(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0$$

Φ — векторно-значная функция

часто условия на начальную и конечную точку разделены

$$\Phi_0(t_0, x(t_0)) = 0, \ \Phi_1(t_1, x(t_1)) = 0$$

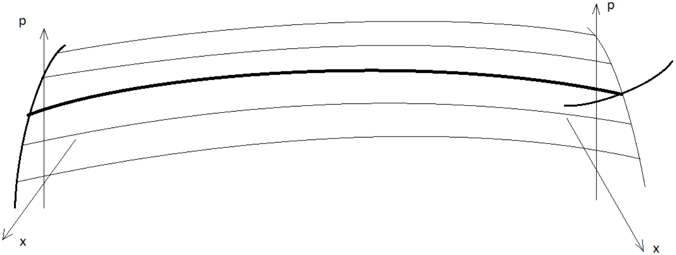
Условия трансверсальности

условия, компенсирующие свободу в выборе краевых точек:

$$(l_{t_1} + L^1)\delta t_1 + (l_{t_0} - L^0)\delta t_0 + \langle l_{x_1} + L^1_{\dot{x}}, \delta x_1 \rangle + \langle l_{x_0} - L^0_{\dot{x}}, \delta x_0 \rangle = 0$$

для всех вариаций $(\delta t_0, \delta x_0, \delta t_1, \delta x_1)$, касательных к многообразию $\Phi = 0$ в точке $(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$

здесь
$L^i = L(t_i, x(t_i), \dot{x}(t_i))$, $L^i_{\dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t_i, x(t_i), \dot{x}(t_i))$,
$l_{t_i} = \frac{\partial l}{\partial t_i}$, $l_{x_i} = \frac{\partial l}{\partial x_i}$


p
x
p
x

Задача оптимального управления

ищем траекторию управляемой динамической системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \qquad u \in U$$

минимизирующую функционал цены

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, u)\, dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$$

при краевых условиях

$$\Phi(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0$$

u — *управление*

эквивалентно дифференциальному включению

$$\dot{x} \in \{f(t, x, u) \mid u \in U\}$$

Принцип максимума Понтрягина

введем *функцию Понтрягина*

$$\mathcal{H}(t, x, \psi, u) = -\lambda_0 f_0(t, x, u) + \langle \psi(t), f(t, x, u) \rangle$$

и гамильтониан

$$H(t, x, \psi) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(t, x, \psi, u)$$

существуют константа $\lambda_0 \geq 0$ и функция $\psi(t)$, не равные нулю одновременно, такие что $(x(t), \psi(t))$ является решением гамильтоновой системы с гамильтонианом H, т.е.

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}$$

Условия трансверсальности

имеем

$$(l_{t_1} - H^1)\delta t_1 + (l_{t_0} + H^0)\delta t_0 + \langle l_{x_1} + \psi^1, \delta x_1 \rangle + \langle l_{x_0} - \psi^0, \delta x_0 \rangle = 0$$

для всех вариаций $(\delta t_0, \delta x_0, \delta t_1, \delta x_1)$, касательных к многообразию $\Phi = 0$ в точке $(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$

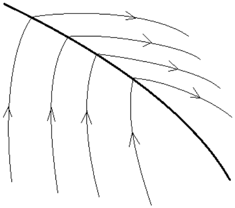
здесь
$\psi^i = \psi(t_i)$, $H^i = H(t_i, x(t_i), \psi(t_i))$,
$l_{t_i} = \frac{\partial l}{\partial t_i}$, $l_{x_i} = \frac{\partial l}{\partial x_i}$

Неединственность траекторий

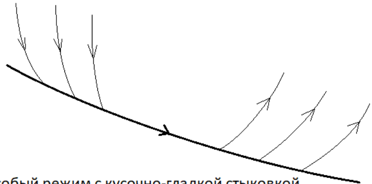
оптимальное управление $\hat{u} = \arg\max_{u \in U} \mathcal{H}$ может быть разрывной функцией от t, x, ψ

гамильтонова динамическая система может иметь разрывную правую часть

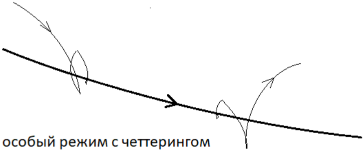
$\Rightarrow$ нет единственности траектории, проходящей через данную точку (t, x, ψ)



поверхность переключения



особый режим с кусочно-гладкой стыковкой



особый режим с четтерингом

Пример: задача быстродействия

динамика

$$\dot{x} = y, \;\; \dot{y} = u \in [-1, 1]$$

целевая функция

$$T = \int_0^T 1 \, dt \to \inf$$

краевые условия

$$(x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, y_0), \;\; (x(T), \dot{x}(T)) = (0, 0)$$

Принцип максимума

переменным (x, y) сопоставим сопряженные переменные (ϕ, ψ)

функция Понтрягина примет вид

$$\mathcal{H} = -\lambda_0 + \phi y + \psi u$$

оптимальное управление $\hat{u} = \operatorname{sgn} \psi$

гамильтониан

$$H = -\lambda_0 + \phi y + |\psi|$$

динамика сопряженных переменных

$$\dot{\phi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\phi$$

ϕ — постоянная, ψ — линейная по t

Оптимальный синтез

конечное время T не фиксировано
$\Rightarrow$ условие трансверсальности: $H(T) = 0$

отсюда $\lambda_0 = |\psi(T)|$, и $\psi \not\equiv 0$

на оптимальной траектории может быть не более одной точки, в которой $\psi = 0$

почти всюду оптимальное управление имеет значение $\hat{u} = \pm 1$, и мы имеем максимум одно переключение между этими значениями

Постановка задачи

динамика

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \quad u \in U$$

краевые ограничения

$$x(0) = x_0, \; x(T) \in K$$

фазовые ограничения (state constraints)

$$(t, x(t), u(t)) \in S$$

K, S, U — компакты

целевая функция

$$J = \int_0^T L(t, x(t), u(t))\, dt + l(x(T))$$

Меры оккупации

с траекторией $(t, x(t), u(t))$ ассоциируем две меры

мера, определенная δ-функцией с носителем в точке $x(T)$

$$\nu(D) = \begin{cases} 0, & x(T) \notin D, \\ 1, & x(T) \in D \end{cases}$$

$D \subset \mathbb{R}^n$

сингулярная мера с носителем на самой траектории

$$\mu(A \times B \times C) = \int_{A \cap [0,T]} I_{B \times C}(x(t), u(t))\, dt$$

$A \times B \times C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U$, $I_{B \times C}$ — индикаторная функция

Переформулировка задачи

функционал цены записывается в виде

$$J = \int_K l \, d\nu + \int_S L \, d\mu$$

линейный по (ν, μ)

для допустимой траектории

$$\operatorname{supp} \nu \subset K, \ \operatorname{supp} \mu \subset S, \ \mu(S) = T$$

Переформулировка задачи

пусть $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $g_T(x) = g(T, x)$, тогда
$\int_K g_T \, d\nu = g(T, x(T))$,

$$\int_S (g_t + \langle g_x, f \rangle) \, d\mu = \int_0^T \frac{d}{dt} g(t, x(t)) \, dt = g(T, x(T)) - g(0, x(0))$$

поэтому

$$\int_K g_T \, d\nu - \int_S (g_t + \langle g_x, f \rangle) \, d\mu = g(0, x_0)$$

подставляя конкретные функции g, получаем линейные ограничения типа равенства на пару мер (ν, μ)

Задача в пространстве мер

минимизируем функционал

$$J = \int_K l\, d\nu + \int_S L\, d\mu$$

на конусе пар (ν, μ) неотрицательных мер, удовлетворяющих условиям

$$\mathrm{supp}\ \nu \subset K,\ \ \nu(K) = 1,\ \mathrm{supp}\ \mu \subset S,\ \ \mu(S) = T$$

и

$$\int_K g_T\, d\nu - \int_S (g_t + \langle g_x, f \rangle)\, d\mu = g(0, x_0)$$

для всех функций $g(t, x)$ класса C^1

Связь с исходной задачей

Теорема

Если существует допустимая пара мер (ν, μ), *то задача на конусе пар неотрицательных мер имеет решение, значение которого не больше оптимального значения исходной задачи. В этом случае, если для всех* (t, x) *множество* $\{f(t, x, u) \mid u \in U\}$ *выпукло и* $\inf_{u: f(t,x,u)=v} L(t, x, u)$ *является выпуклой функцией от* v, *то исходная задача имеет решение и его значение совпадает со значением задачи на пространстве мер.*

Релаксация задачи с полиномиальными данными

пусть K, S, U — базовые полу-алгебраические множества, L, l, f — полиномы

функционал цены — линейная комбинация моментов мер ν, μ

условия включения $\operatorname{supp} \nu \subset K$, $\operatorname{supp} \mu \subset S$ релаксируем линейными и полу-определенными условиями на моменты

условия $\nu(K) = 1$, $\mu(S) = T$ переписываются в виде $m_0(\nu) = 1$, $m_0(\mu) = T$

в условия

$$\int_K g_T \, d\nu - \int_S (g_t + \langle g_x, f \rangle) \, d\mu = g(0, x_0)$$

подставим мономы $g = t^\alpha x^\beta$ и получим линейные условия на моменты мер ν, μ

учитываем только моменты до степени d

Другие типы условий

$x(0) \in K'$:
вводим еще одну неотрицательную меру ν' с носителем в K'
в уравнениях заменяем $x(0)^\alpha$ на $m_\alpha(\nu')$

$(t_0, x(t_0)) \in K'$:
вводим неотрицательную меру ν' на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ с носителем в K'
в уравнениях заменяем $t_0^\alpha x(t_0)^\beta$ на $m_{\alpha,\beta}(\nu')$

Пример: задача быстродействия

динамика

$$\dot{x} = y, \;\; \dot{y} = u \in [-1, 1]$$

целевая функция

$$T = \int_0^T 1\, dt \to \inf$$

краевые условия

$$(x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, y_0), \;\; (x(T), \dot{x}(T)) = (0, 0)$$

Мера ν

начальная точка фиксирована и равна $(t, x, y) = (0, x_0, y_0)$

конечная точка $(t, x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \{0\}$

введем вероятностную меру ν на $\mathbb{R}_+$ с моментами

$$m_\alpha(\nu) = \int_0^{+\infty} t^\alpha d\nu(t)$$

$m_k(\nu)$ соответствует T^k

последовательность c_k является вектором моментов неотрицательной меры ν на $\mathbb{R}_+$, если

$$c_k = m_{2k}(\nu')$$

для неотрицательной меры ν' на $\mathbb{R}$

Полу-определенные условия на моменты ν

последовательность $\{m_\alpha\}$ является последовательностью моментов неотрицательной меры на $\mathbb{R}_+$ тогда и только тогда, когда все ханкелевые матрицы вида

$$\begin{pmatrix} m_0 & 0 & m_1 & 0 & m_2 & \cdots & m_n \\ 0 & m_1 & 0 & m_2 & \cdots & m_n & 0 \\ m_1 & 0 & m_2 & \cdots & m_n & 0 & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_n & 0 & m_{n+1} & \cdots & m_{2n-1} & 0 & m_{2n} \end{pmatrix}$$

неотрицательно определены

для конечного набора получаем линейное матричное неравенство

Мера μ

введем неотрицательную меру $\mu(t, x, y, u)$ на произведении $\Pi = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-1, 1]$

момент $m_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ соответствует интегралу $t^\alpha x^\beta y^\gamma u^\delta$ по μ

пусть $\mathbf{v}$ — вектор мономов вида $t^\alpha x^\beta y^\gamma u^\delta$, тогда

$$\int_\Pi \mathbf{v}\mathbf{v}^T\, d\mu, \quad \int_\Pi t\mathbf{v}\mathbf{v}^T\, d\mu, \quad \int_\Pi (1 \pm u)\mathbf{v}\mathbf{v}^T\, d\mu$$

являются неотрицательно определенными матрицами с элементами, заданными линейными комбинациями моментов меры μ

получаем необходимые полу-определенные условия на вектор моментов μ

$d = 3$

$$\mathbf{v} = (1, t, x, y, u)^T$$

$$\int_\Pi \mathbf{v}\mathbf{v}^T \, d\mu = \begin{pmatrix} m_{0000} & m_{1000} & m_{0100} & m_{0010} & m_{0001} \\ m_{1000} & m_{2000} & m_{1100} & m_{1010} & m_{1001} \\ m_{0100} & m_{1100} & m_{0200} & m_{0110} & m_{0101} \\ m_{0010} & m_{1010} & m_{0110} & m_{0020} & m_{0011} \\ m_{0001} & m_{1001} & m_{0101} & m_{0011} & m_{0002} \end{pmatrix} \succeq 0$$

$$\int_\Pi t\mathbf{v}\mathbf{v}^T \, d\mu = \begin{pmatrix} m_{1000} & m_{2000} & m_{1100} & m_{1010} & m_{1001} \\ m_{2000} & m_{3000} & m_{2100} & m_{2010} & m_{2001} \\ m_{1100} & m_{2100} & m_{1200} & m_{1110} & m_{1101} \\ m_{1010} & m_{2010} & m_{1110} & m_{1020} & m_{1011} \\ m_{1001} & m_{2001} & m_{1101} & m_{1011} & m_{1002} \end{pmatrix} \succeq 0$$

$d = 3$

$$\int_{\Pi} (1 \pm u)\mathbf{v}\mathbf{v}^T \, d\mu = \begin{pmatrix} m_{0000} & m_{1000} & m_{0100} & m_{0010} & m_{0001} \\ m_{1000} & m_{2000} & m_{1100} & m_{1010} & m_{1001} \\ m_{0100} & m_{1100} & m_{0200} & m_{0110} & m_{0101} \\ m_{0010} & m_{1010} & m_{0110} & m_{0020} & m_{0011} \\ m_{0001} & m_{1001} & m_{0101} & m_{0011} & m_{0002} \end{pmatrix}$$

$$\pm \begin{pmatrix} m_{0001} & m_{1001} & m_{0101} & m_{0011} & m_{0002} \\ m_{1001} & m_{2001} & m_{1101} & m_{1011} & m_{1002} \\ m_{0101} & m_{1101} & m_{0201} & m_{0111} & m_{0102} \\ m_{0011} & m_{1011} & m_{0111} & m_{0021} & m_{0012} \\ m_{0002} & m_{1002} & m_{0102} & m_{0012} & m_{0003} \end{pmatrix} \succeq 0$$

Условия из динамики

пусть $g(t,x,y) = t^\alpha x^\beta y^\gamma$,

$$\frac{dg}{dt} = g_t + g_x y + g_y u = \alpha t^{\alpha-1} x^\beta y^\gamma + \beta t^\alpha x^{\beta-1} y^{\gamma+1} + \gamma t^\alpha x^\beta y^{\gamma-1} u$$

$$g(0, x(0), y(0)) = 0^\alpha x_0^\beta y_0^\gamma,$$
$$g(T, x(T), y(T)) = T^\alpha 0^\beta 0^\gamma = m_\alpha(\nu) 0^\beta 0^\gamma$$

отсюда

$$0^\alpha x_0^\beta y_0^\gamma + \alpha m_{\alpha-1,\beta,\gamma,0}(\mu) + \beta m_{\alpha,\beta-1,\gamma+1,0}(\mu) + \gamma m_{\alpha,\beta,\gamma-1,1}(\mu)$$
$$= m_\alpha(\nu) 0^\beta 0^\gamma$$

$d = 3$

обозначим $m_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\mu) = m_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $m_\alpha(\nu) = n_\alpha$

подстановкой разных наборов (α, β, γ), удовлетворяющих $\alpha + \beta + \gamma \leq 3$, получаем 20 уравнений

$$\begin{aligned} 1 &= n_0 \\ m_{0000} &= n_1 \\ x_0 + m_{0010} &= 0 \\ &\vdots \\ y_0^3 + 3m_{0021} &= 0 \end{aligned}$$

Результаты

минимизируем функционал цены $\int_{\Pi} 1\, d\mu = m_{0000}$

оптимальное значение релаксации для $d = 3$ равно $|y_0|$

для начального значения $(x_0, y_0) = (1, -1)$ оптимальное значение в зависимости от d равно

d	1	2	3	4	5
J_{opt}	1.0000	1.0000	1.0000	1.0045	1.1509
d	6	7	8	9	10
J_{opt}	1.2593	1.3949	1.4158	1.4413	1.4441

точное значение для этой начальной точки равно $\sqrt{6} - 1 \approx 1.4495$