4 Меры оккупации

На этой лекции мы рассмотрим моментные релаксации в приложении к бесконечно-мерным задачам, а именно, к задачам оптимального управления с полиномиальными данными. В задаче оптимального управления ищется функция от одной переменной, являющаяся решением некоторого дифференциального включения и минимизирующая некоторый функционал цены. Стандартным методом решения таких задач является принцип максимума Понтрягина. Он сводит исходную задачу к задаче нахождения решения обыкновенного дифференциального уравнения с разрывной правой частью и краевыми условиями в начальной и конечной точках траектории.

Если данные задачи полиномиальны, то можно применить совершенно иной подход. Вместо того, чтобы искать траекторию, мы ищем неотрицательную меру с носителем на оптимальной траектории. Задача формулируется в пространстве мер как бесконечно-мерная коническая программа. Как и на предыдущей лекции, она сводится к конечно-мерной программе над конусом моментов, который аппроксимируется стандартными методами сумм квадратов. Таким образом мы получаем иерархию полу-определенных релаксаций для исходной задачи оптимального управления.

В этой части 2 упражнения.

4.1 Задача оптимального управления

Напомним, как решается простейшая задача вариационного исчисления. Рассмотрим проблему

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t,x,\dot x)\,dt \to \inf, \qquad x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1,$$

где искомая векторно-значная функция $x(t)$ непрерывно дифференцируема. Экстремали в этой задаче должны удовлетворять уравнению Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x} + \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

которое является необходимым условием оптимальности первого порядка.

Немного сложнее ситуация в задаче Больца

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t,x,\dot x)\,dt + l(x(t_0),x(t_1)) \to \inf,$$

где значения функции в концах удовлетворяют условию

$$\Phi(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)) = 0.$$

Здесь Φ — векторно-значная функция класса C^1. Это включает также случай, когда начальная и конечная точки $(t_0,x(t_0))$ и $(t_1,x(t_1))$ привязаны к некоторым достаточно гладким подмногообразиям.

Помимо уравнения Эйлера, решение этой задачи должно удовлетворять условиям трансверсальности

$$(l_{t_1}+L^1)\delta t_1 + (l_{t_0}-L^0)\delta t_0 + \langle l_{x_1}+L^1_{\dot x},\delta x_1\rangle + \langle l_{x_0}-L^0_{\dot x},\delta x_0\rangle = 0$$

для всех вариаций $(\delta t_0,\delta x_0,\delta t_1,\delta x_1)$, касательных к многообразию $\Phi=0$ в точке $(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))$. Здесь $L^i = L(t_i,x(t_i),\dot x(t_i))$, а $L^i_{\dot x} = \frac{\partial L}{\partial \dot x}(t_i,x(t_i),\dot x(t_i))$, $l_{t_i} = \frac{\partial l}{\partial t_i}$, $l_{x_i} = \frac{\partial l}{\partial x_i}$. Иными словами, вектор

$$\left(l_{t_0}-L^0, l_{x_0}-L^0_{\dot x}, l_{t_1}+L^1, l_{x_1}+L^1_{\dot x}\right)$$

должен быть равен линейной комбинации градиентов компонент Φ в точке $(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))$.

Теория вариационного исчисления изложена в книге [1].

Перейдем теперь к задаче оптимального управления. В этой задаче мы ищем траекторию управляемой динамической системы

$$\dot x = f(t,x,u), \qquad u\in U,$$

минимизирующую функционал цены

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x,u)\,dt + l(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))$$

при краевых условиях

$$\Phi(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)) = 0.$$

Здесь u является векторно-значным *управлением*, принимающим значения в допустимом множестве U. Управляемую диначическую систему можно также рассматривать как дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \{f(t,x,u) \mid u \in U\}.$$

Для решения задачи введем *функцию Понтрягина*

$$\mathcal{H}(t,x,\psi,u) = -\lambda_0 f_0(t,x,u) + \langle \psi(t), f(t,x,u)\rangle$$

и гамильтониан

$$H(t,x,\psi) = \max_{u\in U} \mathcal{H}(t,x,\psi,u).$$

Тогда необходимым условием оптимальности решения $x(t)$ является существование константы $\lambda_0 \geq 0$ и функции $\psi(t)$, не равных нулю одновременно, таких что пара $(x(t),\psi(t))$ является решением гамильтоновой системы с гамильтонианом H, т.е. сопряженные переменные ψ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}.$$

Условия трансверсальности записываются в виде

$$(l_{t_1} - H^1)\delta t_1 + (l_{t_0} + H^0)\delta t_0 + \langle l_{x_1} + \psi^1, \delta x_1\rangle + \langle l_{x_0} - \psi^0, \delta x_0\rangle = 0$$

для всех вариаций $(\delta t_0, \delta x_0, \delta t_1, \delta x_1)$, касательных к многообразию $\Phi = 0$ в точке $(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$. Здесь $\psi^i = \psi(t_i)$, $H^i = H(t_i, x(t_i), \psi(t_i))$, а l_{t_i}, l_{x_i} по-прежнему обозначают частные производные функции l.

Так как оптимальное управление $\hat{u}$, реализующее максимум функции Понтрягина, может быть разрывной функцией от t,x,ψ, то возникающая гамильтонова динамическая система может иметь разрывную правую часть. Поэтому в этой системе может нарушаться единственность траектории, проходящей через данную точку (t,x,ψ).

Классическим пособием по теории оптимального управления является книга [4].

Пример: Рассмотрим задачу быстродействия

$$\ddot{x} = u \in [-1,1], \qquad T = \int_0^T 1\,dt \to \inf, \quad (x(0),\dot{x}(0)) = (x_0,y_0),\ (x(T),\dot{x}(T)) = (0,0).$$

Обозначим производную $\dot{x}$ через y. Вектору состояния (x,y) системы поставим в соответствие вектор сопряженных переменных (ϕ,ψ). Тогда функция Понтрягина примет вид

$$\mathcal{H} = -\lambda_0 + \phi y + \psi u,$$

а ее максимум по $u \in U$ достигается при управлении $u = \operatorname{sgn}\psi$ и задается

$$H = -\lambda_0 + \phi y + |\psi|.$$

Отсюда получаем

$$\dot{\phi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\phi.$$

Таким образом, функция ϕ постоянная, а ψ — линейная по t.

Так как конечное время T не фиксировано, условие трансверсальности приводит к соотношению $H(T) = 0$. Отсюда получаем $\lambda_0 = |\psi(T)|$. Если переменная ψ тождественно равна нулю, то и $\phi \equiv 0$, и

$\lambda_0 = 0$, что приводит к противоречию. Поэтому на оптимальной траектории может быть не более одной точки, в которой $\psi = 0$. Из этого следует, что почти всюду оптимальное управление имеет значение $\hat{u} = \pm 1$, и мы имеем максимум одно переключение между этими значениями.

Упражнение 4.1: Показать, что для данной начальной точки (x_0, y_0) существует единственная траектория управляемой системы, приходящая в начало координат с не более чем одним переключением, и вычислить соответствующее оптимальное время T как функцию от x_0, y_0.

Принцип максимума Понтрягина сводит задачу оптимального управления к решению дифференциального уравнения с разрывной правой частью с краевыми условиями, заданными и в начальной, и в конечной точках траектории. В большинстве случаев общее решение уравнения не удается выразить аналитически, и задачу рашают численно, например, методами стрельбы [5]. В следующем разделе мы рассмотрим совершенно иной подход, применимый для задач с полиномиальными данными и основанный на моментных релаксациях.

4.2 Меры оккупации

Напомним, что в задаче оптимального управления мы ищем *траекторию* $x(t)$ управляемой динамической системы, удовлетворяющую различным ограничениям и минимизирующую функционал цены. В классической задаче конечно-мерной оптимизации, которая рассматривалась на предыдущих лекциях, мы искали *точку* x, удовлетворяющую ограничениям и минимизирующую функцию цены. В последнем случае мы рассмотрели переход к формально выпуклой задаче в пространстве *мер*, в которой оптимальная мера задавалась δ-функцией с носителем в множестве решений исходной задачи. Этот подход можно обобщить и на задачи оптимального управления. В этом случае оптимальная мера будет иметь носитель, концентрированный на оптимальной траектории динамической системы.

Переписать исходную задачу в форме программы над бесконечно-мерным конусом неотрицательных мер можно независимо от того, задается ли исходная задача оптимального управления полиномиальными данными. Поэтому мы вначале не будем делать соответствующих предположений. Позже мы рассмотрим более узкий класс полиномиальных задач, поскольку только в этом случае можно построить моментную релаксацию.

Рассмотрим управляемую динамическую систему

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \quad u \in U$$

с начальным значением $x(0) = x_0$. Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы. Множество U допустимых управлений предполагаем компактным. На траектории системы можно наложить дополнительные ограничения, например, ограничение

$$x(T) \in K$$

на конечную точку, и фазовые ограничения (state constraints)

$$(t, x(t), u(t)) \in S$$

на промежуточные точки траектории. Здесь K, S — некоторые заданные компактные подмножества. На допустимых траекториях системы минимизируем функционал

$$J = \int_0^T L(t, x(t), u(t))\, dt + l(x(T)).$$

Пусть $(x(t), u(t))$ — траектория системы. Введем две меры оккупации, ассоциированные с этой траекторией. Первая соответствует δ-функции с носителем в конечной точке. Мера подмножества $D \subset \mathbb{R}^n$ задается формулой

$$\nu(D) = \begin{cases} 0, & x(T) \notin D, \\ 1, & x(T) \in D. \end{cases}$$

Вторая есть сингулярная мера с носителем на самой траектории. Мера произведения $A \times B \times C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U$ задается формулой

$$\mu(A \times B \times C) = \int_{A \cap [0,T]} I_{B \times C}(x(t), u(t))\, dt.$$

Эта мера определяет, сколько времени траектория проводит в подмножестве $B \times C$. Здесь $I_{B\times C}$ — индикаторная функция множества $B \times C$.

С помощью этих мер функционал цены записывается в виде

$$J = \int_K l\, d\nu + \int_S L\, d\mu. \tag{1}$$

Отметим, что функционал цены становится линейным по паре мер (ν, μ).

Заметим также, что допустимость траектории влечет за собой включения $\operatorname{supp} \nu \subset K$, $\operatorname{supp} \mu \subset S$ и соотношение $\mu(S) = T$.

Рассмотрим теперь условия, которые налагаются на меры ν, μ динамикой системы. Пусть $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ — функция класса C^1. Определим также для краткости функцию $g_T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ посредством $g_T(x) = g(T, x)$. Тогда имеем

$$\int_K g_T\, d\nu - \int_S (g_t + \langle g_x, f\rangle)\, d\mu = g(0, x_0), \tag{2}$$

где g_t, g_x обозначают частные производные функции g. Действительно, в силу определения ν имеем $\int_K g_T\, d\nu = g(T, x(T))$, а в силу определения μ имеем

$$\int_S (g_t + \langle g_x, f\rangle)\, d\mu = \int_0^T \frac{d}{dt} g(t, x(t))\, dt = g(T, x(T)) - g(0, x(0)).$$

В конце концов, соотношение (2) получается из начального условия на траекторию.

Заметим, что левая часть соотношения (2) является линейным функционалом на пространстве функций g класса C^1, который в свою очередь линейно зависит от пары мер (ν, μ). В правой части также стоит линейный функционал на пространстве функций g, а именно δ-функция с носителем в точке $(0, x_0)$. Приравнивая обе части и подставляя конкретные функции g, получаем линейные ограничения типа равенства на пару мер (ν, μ).

Сформулируем следующую задачу на пространстве мер. Минимизируем функционал (1) на конусе пар (ν, μ) неотрицательных мер, удовлетворяющих условиям $\operatorname{supp} \nu \subset K$, $\nu(K) = 1$, $\operatorname{supp} \mu \subset S$, $\mu(S) = T$ и (2) для всех функций $g(t, x)$ класса C^1. Эта задача следующим образом соотносится к исходной задаче оптимального управления.

Теорема 4.1. *Если существует допустимая пара мер (ν, μ), то сформулированная выше задача на конусе пар неотрицательных мер имеет решение, значение которого не больше оптимального значения исходной задачи. В этом случае, если для всех (t, x) множество $\{f(t, x, u) \mid u \in U\}$ выпукло и $\inf_{u: f(t,x,u)=v} L(t, x, u)$ является выпуклой функцией от v, то исходная задача имеет решение и его значение совпадает со значением задачи на пространстве мер.*

Теперь предположим, что динамика системы, ее ограничения и функционал цены задаются полиномами. В частности, предположим, что множества K, S, U — базовые полу-алгебраические. Тогда функционал цены задается линейной комбинацией моментов мер ν, μ. Условия включения $\operatorname{supp} \nu \subset K$, $\operatorname{supp} \mu \subset S$ можно релаксировать линейными и полу-определенными условиями на моменты ν, μ, как это было описано на предыдущей лекции. Условия $\nu(K) = 1$, $\mu(S) = T$ переписываются в виде $m_0(\nu) = 1$, $m_0(\mu) = T$.

Так как полиномы плотны в пространстве функций класса C^1 на компактном множестве, нам достаточно потребовать выполнение соотношений (2) для всех мономов $g(t, x) = t^\alpha x^\beta$. Для каждого монома получаем линейное условие типа равенства на моменты мер ν, μ.

Учитывая только условия на моменты степени, не превосходящей d, мы получаем конечно-мерную полу-определенную релаксацию исходной задачи оптимального управления. По мере увеличения d релаксации усиливаются, но и их сложность растет.

Представленные методы решения задачи оптимального управления, использующие меры оккупации, описаны в работе [3]. Если начальная точка $x(0)$ не фиксирована, а варьируется в некотором базовом полу-алгебраическом множестве, то необходимо ввести еще одну неотрицательную меру ν', соответствующую начальной точке [2]. Если начальные или конечные моменты времени не фиксированы, то необходимо сделать соответствующие модификации.

Рассмотрим пример из предыдущего раздела.

Начальная точка фиксирована и равна $(t,x,y) = (0,x_0,y_0)$. Однако, конечная точка (t,x,y) может находиться на луче $\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \{0\}$. Поэтому введем вероятностную меру ν на этом луче. Эта мера характеризуется моментами

$$m_\alpha(\nu) = \int_0^{+\infty} t^\alpha d\nu(t).$$

Отметим, что $m_0(\nu) = 1$, а первый момент $m_1(\nu)$ соответствует конечному моменту времени T. Вектор моментов неотрицательной меры ν на $\mathbb{R}_+$ можно точно охарактеризовать полу-определенным условием. А именно,

$$m_\alpha(\nu) = m_{2\alpha}(\nu'), \tag{3}$$

где ν' — неотрицательная мера на $\mathbb{R}$. Поэтому последовательность $\{m_\alpha\}$ является последовательностью моментов неотрицательной меры на $\mathbb{R}_+$ тогда и только тогда, когда все ханкелевые матрицы вида

$$\begin{pmatrix} m_0 & 0 & m_1 & 0 & m_2 & \cdots & m_n \\ 0 & m_1 & 0 & m_2 & \cdots & m_n & 0 \\ m_1 & 0 & m_2 & \cdots & m_n & 0 & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_n & 0 & m_{n+1} & \cdots & m_{2n-1} & 0 & m_{2n} \end{pmatrix}$$

неотрицательно определены.

Упражнение 4.2: Доказать соотношение (3), т.е. для данной неотрицательной меры ν на $\mathbb{R}_+$ построить соответствующую меру ν' на $\mathbb{R}$ и наоборот.

Введем неотрицательную меру μ на произведении $\Pi = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-1,1]$, в котором варьируется аргумент (t,x,y,u). Ее момент $m_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ соответствует интегралу по мере от монома $t^\alpha x^\beta y^\gamma u^\delta$. Пусть $\mathbf{v}$ — вектор мономов вида $t^\alpha x^\beta y^\gamma u^\delta$. Тогда интегралы

$$\int_\Pi \mathbf{v}\mathbf{v}^T\,d\mu, \quad \int_\Pi t\mathbf{v}\mathbf{v}^T\,d\mu, \quad \int_\Pi (1-u)\mathbf{v}\mathbf{v}^T\,d\mu, \quad \int_\Pi (1+u)\mathbf{v}\mathbf{v}^T\,d\mu$$

являются неотрицательно определенными матрицами с элементами, заданными линейными комбинациями моментов меры μ. Соответствующие линейные матричные неравенства являются необходимыми условиями на вектор моментов μ.

Для функции $g(t,x,y) = t^\alpha x^\beta y^\gamma$ получаем на любой траектории системы, что

$$\frac{dg}{dt} = g_t + g_x y + g_y u = \alpha t^{\alpha-1}x^\beta y^\gamma + \beta t^\alpha x^{\beta-1}y^{\gamma+1} + \gamma t^\alpha x^\beta y^{\gamma-1}u.$$

Начальное значение g равно $0^\alpha x_0^\beta y_0^\gamma$, в то время как конечное $T^\alpha 0^\beta 0^\gamma$ соответствует выражению $m_\alpha(\nu)0^\beta 0^\gamma$. Отсюда получаем, что (2) заменяется соотношениями

$$0^\alpha x_0^\beta y_0^\gamma + \alpha m_{\alpha-1,\beta,\gamma,0}(\mu) + \beta m_{\alpha,\beta-1,\gamma+1,0}(\mu) + \gamma m_{\alpha,\beta,\gamma-1,1}(\mu) = m_\alpha(\nu)0^\beta 0^\gamma. \tag{4}$$

Функционал цены равен $\int_\Pi 1\,d\mu = m_0(\mu)$, а соотношение $m_0(\mu) = T$, выведенное выше для случая с фиксированным конечным временем, следует заменить на $m_0(\mu) = m_1(\nu)$.

Построим релаксацию, учитывающую условия на моменты мер ν,μ до степени $d = 3$. Для краткости будем обозначать $m_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\mu)$ через $m_{\alpha\beta\gamma\delta}$, а $m_\alpha(\nu)$ через n_α. Приходим к полу-определенной задаче

$$m_{0000} \to \inf,$$

$$\begin{pmatrix} n_0 & 0 & n_1 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 & n_2 \\ n_1 & 0 & n_2 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & n_3 \end{pmatrix} \succeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} m_{0000} & m_{1000} & m_{0100} & m_{0010} & m_{0001} \\ m_{1000} & m_{2000} & m_{1100} & m_{1010} & m_{1001} \\ m_{0100} & m_{1100} & m_{0200} & m_{0110} & m_{0101} \\ m_{0010} & m_{1010} & m_{0110} & m_{0020} & m_{0011} \\ m_{0001} & m_{1001} & m_{0101} & m_{0011} & m_{0002} \end{pmatrix} \succeq 0, \quad \begin{pmatrix} m_{1000} & m_{2000} & m_{1100} & m_{1010} & m_{1001} \\ m_{2000} & m_{3000} & m_{2100} & m_{2010} & m_{2001} \\ m_{1100} & m_{2100} & m_{1200} & m_{1110} & m_{1101} \\ m_{1010} & m_{2010} & m_{1110} & m_{1020} & m_{1011} \\ m_{1001} & m_{2001} & m_{1101} & m_{1011} & m_{1002} \end{pmatrix} \succeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} m_{0000} & m_{1000} & m_{0100} & m_{0010} & m_{0001} \\ m_{1000} & m_{2000} & m_{1100} & m_{1010} & m_{1001} \\ m_{0100} & m_{1100} & m_{0200} & m_{0110} & m_{0101} \\ m_{0010} & m_{1010} & m_{0110} & m_{0020} & m_{0011} \\ m_{0001} & m_{1001} & m_{0101} & m_{0011} & m_{0002} \end{pmatrix} \mp \begin{pmatrix} m_{0001} & m_{1001} & m_{0101} & m_{0011} & m_{0002} \\ m_{1001} & m_{2001} & m_{1101} & m_{1011} & m_{1002} \\ m_{0101} & m_{1101} & m_{0201} & m_{0111} & m_{0102} \\ m_{0011} & m_{1011} & m_{0111} & m_{0021} & m_{0012} \\ m_{0002} & m_{1002} & m_{0102} & m_{0012} & m_{0003} \end{pmatrix} \succeq 0,$$

$$\begin{aligned} 1 &= n_0, \\ m_{0000} &= n_1, \\ x_0 + m_{0010} &= 0, \\ &\vdots \\ y_0^3 + 3m_{0021} &= 0. \end{aligned}$$

Всего уравнений 20, они получаются подстановкой разных наборов (α, β, γ), удовлетворяющих $\alpha+\beta+\gamma \leq 3$, в соотношение (4).

Оптимальное значение релаксации для $d = 3$ равно $|y_0|$, т.е. релаксация еще достаточно тривиальна.

Для начального значения $(x_0, y_0) = (1, -1)$ результат в зависимости от степени d релаксации показан в следующей таблице.

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
J_{opt}	1.0000	1.0000	1.0000	1.0045	1.1509	1.2593	1.3949	1.4158	1.4413	1.4441

Точное значение для этой начальной точки равно $\sqrt{6} - 1 \approx 1.4495$.

Список литературы

[1] I.M. Gelfand and S.V. Fomin. *Calculus of Variations.* Dover, 1963.

[2] Didier Henrion, Jean-Bernard Lasserre, and Carlo Savorgnan. Nonlinear optimal control synthesis via occupation measures. In *Proc. 47th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 4749–4754, 2008.

[3] Jean-Bernard Lasserre, Didier Henrion, Christophe Prieur, and Emmanuel Trelat. Nonlinear optimal control via occupation measures and LMI relaxations. *SIAM J. Control Optim.*, 47(4):1643–1666, 2008.

[4] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, and E.F. Mischchenko. *The mathematical theory of optimal processes.* Wiley, New York, London, 1962.

[5] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. Section 18.1. the shooting method. In *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (3rd ed.).* Cambridge University Press, New York, 2007.