2 Робастные задачи

На этой лекции мы рассмотрим конические программы с неопределенными данными. Если множество неопределенности выпукло, то такую задачу можно преобразовать в детерминированную коническую программу над более сложным конусом положительных отображений. Эта программа называется робастной версией исходной задачи. Мы рассмотрим, как сводить робастные версии разных классов стандартных программ снова к стандартной программе. Если такое преобразование невозможно, то можно провести аппроксимацию. Для случая матричного куба мы придставим результат, оценивающий ошибку, сделанную при аппроксимации.

В этой части 4 упражнения.

2.1 Робастная версия задачи конического программирования

Часто возникает ситуация, в которой данные, определяющие задачу конического программирования, неточные, а могут варьировать в некотором множестве неопределенности, центрированном на номинальных значениях. При этом множество неопределенности может быть задано наперед, а может соответствовать некоторому уровню доверия, если данные задачи являются случайными.

Решение номинальной задачи, т.е. задачи с номинальными коэффициентами, может дать плохой результат или быть недопустимым для коэффициентов в других точках множества неопределенности. В этом случае целесообразно рассмотреть робастную версию задачи, решение которой дает наилучший гарантированный результат для любой реализации неточных коэффициентов в множестве неопределенности. Робастная версия задачи оптимизации отличается тем, что она учитывает неопределенность исходной задачи, но при этом сама является детерминированной. Робастная версия задачи конического программирования была определена и изучена в работе [2]. Более подробно с данной темой можно ознакомиться в пособии [1].

Очевидно, в общем случае невозможно гарантировать выполнение условия типа равенства для всех наборов коэффициентов из множества неопределенности. Поэтому неопределенные коэффициенты могут присутствовать только в условиях типа неравенства, а переменные задачи должны параметризовать не векторное пространство, в котором определен конус, а его аффинное подпространство, задаваемое линейными равенствами конической программы в ее стандартной формулировке. Рассмотрим задачу конического программирования

$$\min_x \langle c, x\rangle \quad : \quad Ax + b \in K$$

с неопределенными коэффициентами $(A, b) \in \mathcal{V}$. Здесь $K \subset V$ — регулярный выпуклый конус. Условие, что коэффициенты c функции цены не являются неопределенными, не ограничивает общности, поскольку в противном случае этого легко можно добиться вводом новой переменной t и ограничением $t \geq \langle c, x\rangle$. Для любого набора коэффицинтов (A, b) из множества неопределенности $\mathcal{V}$ мы имеем обычную коническую задачу, но решение, оптимальное для одного набора коэффициентов, может быть недопустимым для другого набора.

Робастная версия задачи записывается в виде

$$\min_x \langle c, x\rangle \quad : \quad Ax + b \in K \qquad \forall\ (A, b) \in \mathcal{V},$$

т.е., мы ищем наилучшее решение, удовлетворяющее коническому ограничению для всех наборов коэффициентов из множества неопределенности.

Мы будем предполагать, что множество $\mathcal{V}$ выпукло и параметризовано линейно некоторыми переменными $u_1, \dots, u_m$,

$$\mathcal{V} = \left\{ (A, b) = (A_0, b_0) + \sum_{k=1}^{m} u_k (A_k, b_k) \mid (u_1, \dots, u_m) \in U \right\},$$

где U — выпуклое компактное множество с непустой внутренностью, характеризующее множество неопределенности коэффициентов задачи. Покажем, что тогда робастная версия задачи конического программирования сама является задачей конического программирования.

Введем однородную версию множества U, а именно регулярный конус

$$K_U = \{u = (u_0, u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid u_0 \geq 0,\ (u_1, \dots, u_m) \in u_0 U\}.$$

Так как коническое ограничение $Ax + b \in K$ не изменится, если умножить (A, b) на положительную константу, робастная версия запишется в виде

$$\min_x \langle c, x\rangle \quad : \quad \sum_{k=0}^{m} u_k(A_k x + b_k) \in K \qquad \forall\, u \in K_U.$$

Определим линейное отображение

$$L_x : \mathbb{R}^{m+1} \to V, \qquad L_x : u = (u_0, \dots, u_m) \mapsto \sum_{k=0}^{m} u_k(A_k x + b_k),$$

коэффициенты которого аффинны по x. Тогда задача примет вид

$$\min_x \langle c, x\rangle \quad : \quad L_x[K_U] \subset K.$$

Определение 1. *Пусть $K \subset V$, $K' \subset V'$ — регулярные выпуклые конуса. Линейное отображение $L : V \to V'$, переводящее конус K в подмножество конуса K', называется* положительным *по отношению к этим конусам. Множество положительных отображений обозначается через $\mathrm{Pos}(K, K')$.*

Нетрудно показать, что множество положительных отображений само является регулярным выпуклым конусом в пространстве $\mathrm{End}(V, V')$ всех линейных отображений, или эндоморфизмов $L : V \to V'$.

С этим определением робастная версия принимает вид

$$\min_x \langle c, x\rangle \quad : \quad L_x \in \mathrm{Pos}(K_U, K).$$

Таким образом, она сама является задачей конического программирования, но над конусом положительных отображений $\mathrm{Pos}(K_U, K)$. Здесь переменная x по-прежнему параметризует аффинное подпространство, задающееся линейными ограничениями конической программы в ее стандартной формулировке.

Очевидно, сложность робастной версии зависит от того, насколько алгоритмически доступен конус положительных отображений $\mathrm{Pos}(K_U, K)$. Это, в свою очередь, зависит и от конуса K, лежащего в основе исходной задачи, и от конуса K_U, задаваемого множеством неопределенности.

2.2 Конуса положительных отображений

В этом разделе мы рассмотрим конуса положительных отображений, встречающиеся в робастных версиях конических программ над симметрическими конусами, их представления и аппроксимации. Сперва, однако, приведем некоторые результаты общего характера.

Лемма 1. *Пусть $K \subset V$, $K' = K'_1 \times \dots \times K'_N \subset V' = V'_1 \times \dots \times V'_N$ — регулярные выпуклые конуса. Тогда $\mathrm{Pos}(K, K') = \mathrm{Pos}(K, K'_1) \times \dots \times \mathrm{Pos}(K, K'_N)$.*

Доказательство: Для линейного отображения $L = (L_1, \dots, L_N) : V \to V'$, $L_i : V \to V'_i$, и точки $x \in K$ имеем $L(x) \in K'$ тогда и только тогда, когда $L_i(x) \in K'_i$ для всех i. Поэтому $L \in \mathrm{Pos}(K, K')$ эквивалентно совокупности условий $L_i \in \mathrm{Pos}(K, K'_i)$, $i = 1, \dots, N$. □

Лемма 2. *Пусть $K \subset V$, $K' \subset V'$ — регулярные выпуклые конуса, и пусть $\tilde V \subset V'$ — линейное подпространство. Обозначим пересечение $\tilde V \cap K'$ через $\tilde K$. Тогда конус положительных отображений $\mathrm{Pos}(K, \tilde K)$ канонически изоморфен пересечению конуса $\mathrm{Pos}(K, K')$ с линейным подпространством $\{L : V \to V' \mid Im\, L \subset \tilde V\}$.*

Доказательство: Линейное отображение $\tilde L : V \to \tilde V$ является положительным тогда и только тогда, когда $L = I \circ \tilde L$ является положительным, где $I : \tilde V \to V'$ — идентичное вложение. □

Таким образом, если конус K является линейным сечением конуса K', то конус положительных отображений $\mathrm{Pos}(K_U, K)$ представим через $\mathrm{Pos}(K_U, K')$. Для линейных проекций подобное утверждение не имеет место.

Лемма 3. *Пусть $K \subset V$, $K' \subset V'$ — регулярные выпуклые конуса, а $L : V \to V'$ — линейное отображение. Тогда имеем $L \in \mathrm{Pos}(K, K')$ тогда и только тогда, когда $L^\dagger \in \mathrm{Pos}((K')^*, K^*)$.*

Доказательство: Пусть $L \in \mathrm{Pos}(K, K')$, $z \in (K')^*$. Тогда для любого $x \in K$ имеем $\langle L^\dagger(z), x\rangle = \langle z, L(x)\rangle \geq 0$, поскольку $L(x) \in K'$. Из этого следует, что $L^\dagger(z) \in K^*$. Отсюда вытекает $L^\dagger \in \mathrm{Pos}((K')^*, K^*)$.

Обратная импликация доказывается аналогичным образом. □

В частности, конуса положительных отображений $\mathrm{Pos}(K_U, K)$ и $\mathrm{Pos}(K^*, K_U^*)$ изоморфны, и если один из них представим через некоторый конус K', то второй также представим через K'.

Рассмотрим теперь более конкретные примеры. Пусть $K_U \subset \mathbb{R}^{m+1}$, $K \subset V$ — регулярные выпуклые конуса.

Лемма 4. *Если конус K_U полиэдральный с N экстремальными лучами, то конус положительных отображений $\mathrm{Pos}(K_U, K)$ представим через прямое произведение K^N.*

Доказательство: Пусть $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^{m+1}$ — генераторы экстремальных лучей конуса K_U. Тогда $L \in \mathrm{Pos}(K_U, K)$ тогда и только тогда, когда $L(x_i) \in K$ для всех $i = 1, \dots, N$. Но это условие эквивалентно условию $(L(x_1), \dots, L(x_N)) \in K^N$, задающим изоморфизм между конусом $\mathrm{Pos}(K_U, K)$ и некоторым линейным сечением произведения K^N. □

Следствие 1. *Если исходная коническая программа класса LP (SOCP, SDP), а множество неопределенности $\mathcal{V}$ является политопом, то робастная версия конической программы также класса LP (SOCP, SDP).*

Доказательство: Если U — политоп, то конус K_U является полиэдральным. Однако, семейство конусов, над которыми задаются программы классов LP и SOCP, замкнуты относительно операции построения прямых произведений. Прямое произведение же матричных конусов изоморфно линейному сечению матричного конуса большей размерности, задающегося блочно-диагональными матрицами соответствующего типа. □

Если число экстремальных точек политопа $\mathcal{V}$ небольшое, например, если $\mathcal{V}$ параметризуется L_1-шаром $U = \{u \mid ||u||_1 \leq r\}$, то сложность робастной версии конической программы сравнима со сложностью самой конической программы. В этом случае экстремальные точки множества $\mathcal{V}$ называются *сценариями*, а решение робастной задачи является наилучшей точкой, удовлетворяющей ограничениям при любом сценарии.

Если политоп $\mathcal{V}$ имеет большое количество экстремальных точек, например, если $\mathcal{V}$ параметризуется L_∞-шаром $U = \{u \mid ||u||_\infty \leq r\}$, то робастная версия, хотя и формально является задачей того же класса, может быть значительно сложнее, чем исходная коническая программа.

Часто неопределенные параметры задачи нормально распределены, и соответствующее множество неопределенности эллипсоидально. В этом случае конус K_U изоморфен конусу Лоренца L_{m+1}.

Если исходная коническая программа из класса SOCP, то ее робастная версия с эллипсоидальным множеством неопределенности является задачей класса SDP. Этот факт является следствием полу-определенной представимости конуса $\mathrm{Pos}(L_n, L_m)$. Для того, чтобы описать это представление, мы прибегнем к полу-определенному представлению конуса Лоренца, задаваемого инъекцией $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathcal{S}^{n-1}$,

$$f_n : (x_0, \dots, x_{n-1})^T \mapsto \begin{pmatrix} x_0 + x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ x_2 & x_0 - x_1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ x_{n-1} & 0 & 0 & x_0 - x_1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Напомним, что линейное отображение $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ можно описать элементом из тензорного произведения $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}_n$, где $\mathbb{R}_n$ — двойственное к $\mathbb{R}^n$ пространство. Элемент $z \otimes y$, где $y \in \mathbb{R}_n$, $z \in \mathbb{R}^m$, действует на вектор $x \in \mathbb{R}^n$ по правилу $x \mapsto \langle y, x\rangle \cdot z$ и тем самым задает соответствующее $z \otimes y$ линейное отображение L. Для представления положительного отображения $L \in \mathrm{Pos}(L_n, L_m)$ поэтому напрашивается использовать тензорное произведение $f_m \otimes f_n : \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}_n \to \mathcal{S}^{m-1} \otimes \mathcal{S}^{n-1}$.

Произведение $\mathcal{S}^{m-1} \otimes \mathcal{S}^{n-1}$ можно рассматривать как подпространство матричного пространства $\mathcal{S}^{(m-1)(n-1)}$. При этом элементу $A \otimes B \in \mathcal{S}^{m-1} \otimes \mathcal{S}^{n-1}$, где $A \in \mathcal{S}^{m-1}$, $B \in \mathcal{S}^{n-1}$, соответствует кронекеровское произведение $A \otimes B$. (По этой причине один и тот же знак $\otimes$ обозначает и кронекеровское произведение матриц, и тензорное произведение векторных пространств.) Более конкретно, матричное пространство $\mathcal{S}^{(m-1)(n-1)}$ представляется в виде прямой суммы $(\mathcal{S}^{m-1} \otimes \mathcal{S}^{n-1}) \oplus (\mathcal{A}^{m-1} \otimes \mathcal{A}^{n-1})$, где $\mathcal{A}^n$ — пространство косо-симметрических матриц размера $n \times n$. Справедлив следующий результат [5].

Лемма 5. *Пусть $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение. Отображение L положительное, $L \in \mathrm{Pos}(L_n, L_m)$, тогда и только тогда, когда*

$$\exists\ A \in \mathcal{A}^{m-1} \otimes \mathcal{A}^{n-1} \ : \quad (f_m \otimes f_n)(L) + A \succeq 0.$$

Здесь L рассматривается как элемент пространства $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}_n$, а f_n на $\mathbb{R}_n$ задается той же формулой (1).

Упражнение 2.1: В явном виде построить полу-определенное представление конуса $\mathrm{Pos}(L_3, L_3)$ через матричный конус $\mathcal{S}_+^4$.

Перейдем теперь к робастным версиям полу-определенных программ с эллипсоидальным множеством неопределенности. В общем случае проверить включение $L \in \mathrm{Pos}(L_n, \mathcal{S}_+^m)$ является сложной задачей [6]. Однако, можно использовать представление (1) для построения полу-определенно представимой аппроксимации конуса $\mathrm{Pos}(L_n, \mathcal{S}_+^m)$. Линейное отображение $L : \mathbb{R}^n \to \mathcal{S}^m$ можно представить в виде элемента тензорного произведения $\mathcal{S}^m \otimes \mathbb{R}_n$. А именно, элементу $S \otimes y \in \mathcal{S}^m \otimes \mathbb{R}_n$ сопоставим отображение L, действующее на элементах $x \in \mathbb{R}^n$ по правилу $L : x \mapsto \langle y, x\rangle \cdot S$. Справедлив следующий результат [4].

Лемма 6. *Пусть $L : \mathbb{R}^n \to \mathcal{S}^m$ — линейное отображение, представленное в виде элемента пространства $\mathcal{S}^m \otimes \mathbb{R}_n$. Если выполнено условие*

$$\exists\ A \in \mathcal{A}^m \otimes \mathcal{A}^{n-1} \ : \quad (Id \otimes f_n)(L) + A \succeq 0,$$

то L является положительным, $L \in \mathrm{Pos}(L_n, \mathcal{S}_+^m)$. Здесь f_n на $\mathbb{R}_n$ задается той же формулой (1).

Данная полу-определенная аппроксимация конуса $\mathrm{Pos}(L_n, \mathcal{S}_+^m)$ является внутренней. Применяя ее, мы сужаем множество допустимых точек, и решение аппроксимации более консервативно, чем робастная версия задачи.

Однако, если полу-определенный конус K в исходной конической программе является прямым произведением матричных конусов $\mathcal{S}_+^{m_i}$ с $m_i \leq 3$, то релаксация точна. Этот результат вытекает из следующей леммы [4].

Лемма 7. *Пусть $L : \mathbb{R}^n \to \mathcal{S}^3$ — линейное отображение, представленное в виде элемента пространства $\mathcal{S}^3 \otimes \mathbb{R}_n$. Включение $L \in \mathrm{Pos}(L_n, \mathcal{S}_+^3)$ имеет место тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\exists\ A \in \mathcal{A}^3 \otimes \mathcal{A}^{n-1} \ : \quad (Id \otimes f_n)(L) + A \succeq 0.$$

Упражнение 2.2: Доказать аналог этой леммы для случая $m = 2$, т.е., построить полу-определенное представление конуса положительных отображений $\mathrm{Pos}(L_n, \mathcal{S}_+^2)$. (Подсказка: использовать лемму 5 и тот факт, что конуса L_3 и $\mathcal{S}_+^2$ изоморфны.)

Второй частный случай, в котором релаксация точна, это когда эллипсоид, задающий множество неопределенности $\mathcal{V}$, двумерный. В этом случае конус K_U изоморфен L_3. Справедлив следующий результат, доказательство которого мы отложим до следующей лекции.

Лемма 8. *Пусть $L : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{S}^m$ — линейное отображение, заданное формулой $L : (x_0, x_1, x_2) \mapsto x_0 S_0 + x_1 S_1 + x_2 S_2$. Тогда $L \in \mathrm{Pos}(L_3, \mathcal{S}_+^m)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\exists\ A \in \mathcal{A}^m \ : \quad \begin{pmatrix} S_0 + S_1 & S_2 + A \\ S_2 - A & S_0 - S_1 \end{pmatrix} \succeq 0.$$

2.3 Теорема о матричном кубе

В этом разделе мы представим результат А. Бэн-Таля и А.С. Немировского о матричном кубе [3]. Этот результат состоит в оценке на точность полу-определенной релаксации конуса положительных отображений $\mathrm{Pos}(K_U, \mathcal{S}_+^n)$, где $K_U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ построен над единичным кубом $U = [-1, 1]^m$. Этот конус возникает в робастных версиях полу-определенных программ, в которых множество неопределенности $\mathcal{V}$ аффинно изоморфно L_∞-шару.

Линейное отображение $L : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathcal{S}^n$ задается матрицами $B_0, \dots, B_m \in \mathcal{S}^n$ по формуле $x = (x_0, \dots, x_m)^T \mapsto \sum_{l=0}^m x_l B_l$. Ясно, что $L \in \mathrm{Pos}(K_U, \mathcal{S}_+^n)$ тогда и только тогда, когда $B_0 + \sum_{l=1}^m \epsilon_l B_l \succeq 0$ для всех комбинаций $\epsilon_l \in \{-1, +1\}$. Для того, чтобы проверить это включение, надо проверить экспоненциальное число — 2^m линейных матричных неравенств. Однако, это условие можно усилить с понижением сложности до линейной по m. Рассмотрим полу-определенную релаксацию

$$\mathcal{SR} = \left\{ L : x \mapsto \sum_{l=0}^m x_l B_l \mid \exists\, X_l \in \mathcal{S}^n : \ X_l \succeq \pm B_l, \ l = 1, \dots, m; B_0 \succeq \sum_{l=1}^m X_l \right\}.$$

Очевидно $\mathcal{SR} \subset \mathrm{Pos}(K_U, \mathcal{S}_+^n)$, и $\mathcal{SR}$ является внутренней аппроксимацией. Проверка условия $L \in \mathcal{SR}$ эквивалентна проверке на совместимость системы из $2m + 1$ линейных матричных неравенств.

Упражнение 2.3: Доказать, что эта релаксация точна для размера матриц $n = 1$.

Для того, чтобы описать оценку на ошибку релаксации, нам понадобится следующая величина. Для $k \in \mathbb{N}_+$, определим

$$\begin{aligned} \eta(k) &= \min_{V \in \mathcal{S}^k} \mathbb{E}_\xi |\xi^T V \xi| \ : \quad ||V||_1 = 1 \\ &= \min_{\lambda \in \mathbb{R}^k} \mathbb{E}_\kappa |\sum_{j=1}^k \lambda_j \kappa_j| \ : \quad ||\lambda||_1 = 1, \end{aligned}$$

где $\xi \in \mathbb{R}^k$ — стандартный нормально распределенный случайный вектор, а $\kappa_1, \dots, \kappa_k$ — независимые неотрицательные случайные скаляры, распределенные с плотностью $\mu(t) = (2\pi t e^t)^{-1/2}$, т.е., по закону $\chi^2(1)$. Первые значения $\eta(k)$ заданы в следующей таблице.

k	$\eta(k)$, точно	$\eta(k)$, численно
1	1	1.0000
2	$\frac{2}{\pi}$	0.6366
3	$\mathrm{Root}(t^3 + 9t^2 + 135t - 81)$	0.5764
4	$\frac{1}{2}$	0.5000

Заметим, что мат. ожидание выпукло по λ и инвариантно относительно перестановок элементов λ. Поэтому минимум по λ на единичной 1-сфере достигается в точке вида $\lambda = (\lambda_+, \dots, \lambda_+, \lambda_-, \dots, \lambda_-)$, где $\lambda_+ > 0$, $\lambda_- < 0$ — некоторые вещественные числа, встречающиеся k_+ и k_- раз, соответственно. Соответствующее значение вычисляется по формуле

$$\frac{2\Gamma(\frac{k}{2}+1)}{\Gamma(\frac{k_+}{2})\Gamma(\frac{k_-}{2})} \int_0^1 |\lambda_+ \tau + \lambda_-(1-\tau)| \tau^{k_+/2-1} (1-\tau)^{k_-/2-1} \, d\tau.$$

Подставляя $k_+ = k_- = \frac{k}{2}$, $\lambda_+ = -\lambda_- = \frac{1}{k}$, получаем значение $\frac{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}{2^{k/2}\Gamma(\frac{k}{4}+1)^2} \approx \frac{2}{\sqrt{\pi k}}$. При четных k это значение достигается на допустимом векторе λ. Кроме того, имеем нижнюю оценку $\eta(k) \geq \frac{2}{\pi\sqrt{k}}$ [3], и $\eta(k)$ по построению убывает. Отсюда получаем асимптотику $\eta(k) \sim k^{-1/2}$.

Допустим теперь, что $L \not\in \mathcal{SR}$, где L задается набором матриц $(B_0, \dots, B_m)$. Тогда найдется элемент $Z = (Z_0, \dots, Z_m)$ из двойственного конуса $\mathcal{SR}^*$ такой, что $\langle Z, L \rangle = \sum_{j=0}^m \langle Z_j, B_j \rangle < 0$. По построению $\mathcal{SR}$ является линейной проекцией произведения $(\mathcal{S}_+^n)^{2m+1}$. Следовательно, двойственный конус $\mathcal{SR}^*$ является сечением этого произведения, а именно

$$\mathcal{SR}^* = \{(Z_0, Z_1^+ - Z_1^-, \dots, Z_m^+ - Z_m^-) \mid Z_j^+, Z_j^- \succeq 0, \ Z_j^+ + Z_j^- = Z_0 \ \forall\, j = 1, \dots, m\}.$$

Упражнение 2.4: Доказать, что для матриц $B \in \mathcal{S}^n$, $Z \in \mathcal{S}_+^n$ оптимальное значение полу-определенной программы

$$\min_{Z^+, Z^- \succeq 0} \langle B, Z^+ - Z^- \rangle \ : \quad Z^+ + Z^- = Z$$

равно $-||Z^{1/2} B Z^{1/2}||_1$.

Заметим, что для матрицы $V \in \mathcal{S}^n$ ранга не больше k имеет место оценка

$$\mathbb{E}_\xi|\xi^T V\xi| \geq \eta(k) \cdot ||V||_1,$$

где $\xi \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$ — случайный нормально распределенный вектор.

Отсюда следует, что

$$0 > \langle Z, L\rangle \geq \operatorname{tr}(Z_0^{1/2}B_0Z_0^{1/2}) - \sum_{j=1}^m ||Z_0^{1/2}B_jZ_0^{1/2}||_1 \geq \mathbb{E}_\xi\left(\xi^T Z_0^{1/2}B_0Z_0^{1/2}\xi - \sum_{j=1}^m \frac{1}{\eta(\mathrm{rk}\ B_j)}|\xi^T Z_0^{1/2}B_jZ_0^{1/2}\xi|\right).$$

Таким образом, найдется вектор $\zeta \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\zeta^T B_0\zeta - \sum_{j=1}^m \frac{1}{\eta(\mathrm{rk}\ B_j)}|\zeta^T B_j\zeta| < 0.$$

Полагая $\epsilon_j = -\operatorname{sgn}(\zeta^T B_j\zeta)$, получаем $\zeta^T(B_0 + \sum_{j=1}^m \frac{\epsilon_j}{\eta(\mathrm{rk}\ B_j)}B_j)\zeta < 0$. Отсюда вытекает, что отображение $\tilde{L}$, задающееся набором матриц $(B_0, \frac{1}{\eta(\mathrm{rk}\ B_1)}B_1, \dots, \frac{1}{\eta(\mathrm{rk}\ B_m)}B_m)$, не является элементом конуса положительных отображений $\mathrm{Pos}(K_U, \mathcal{S}_+^n)$.

Таким образом в точках, которые соответствуют матрицам $B_1, \dots, B_m$ малого ранга, граница внутренней аппроксимации $\mathcal{SR}$ конуса $\mathrm{Pos}(K_U, \mathcal{S}_+^n)$ находится близко к границе этого конуса. А именно, имеем следующее следствие.

Теорема 2.1. *Пусть матричный куб* $\mathcal{V} = \{B_0 + \sum_{j=1}^m u_jB_j \mid u_j \in [-1, 1]\}$ *задается набором матриц* $(B_0, \dots, B_m)$, *не включенным в множество* $\mathcal{SR}$. *Тогда расширенный матричный куб* $\tilde{\mathcal{V}} = \{B_0 + \sum_{j=1}^m u_jB_j \mid \eta(\mathrm{rk}\ B_j) \cdot |u_j| \leq 1\}$ *не является подмножеством матричного конуса* $\mathcal{S}_+^n$.

Список литературы

[1] Aharon Ben-Tal, Laurent El Ghaoui, and Arkadi Nemirovski. *Robust Optimization.* Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press, 2009.

[2] Aharon Ben-Tal and Arkadi Nemirovski. Robust convex optimization. *Math. Oper. Res.*, 23:769–805, 1998.

[3] Aharon Ben-Tal and Arkadi Nemirovski. On tractable approximations of uncertain linear matrix inequalities affected by interval uncertainty. *SIAM J. Optim.*, 12(3):811–833, 2002.

[4] Roland Hildebrand. Exactness of sums of squares relaxations involving 3x3 matrices and Lorentz cones. *Linear Algebra Appl.*, 426(3):815–840, 2007.

[5] Roland Hildebrand. An LMI description for the cone of Lorentz-positive maps II. *Linear Multilinear A.*, 59(7):719–731, 2011.

[6] Yuri Nesterov. Random walk in a simplex and quadratic optimization over convex polytopes. Discussion paper 2003/71, CORE, Louvain-la-Neuve, 2003.